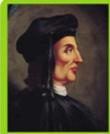


LA GAMME TEMPÉRÉE

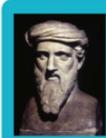
Document 1 : Histoire de la gamme tempérée

La gamme de Pythagore présente deux inconvénients pour les musiciens : une quinte qui n'est pas juste et des intervalles non constants entre les notes obtenues. L'idée de fixer les fréquences des douze notes usuelles en « découpant » l'octave en douze intervalles égaux, appelés demi-tons, s'est petit à petit imposée.



Au milieu du xvi^e siècle, l'italien **Gioseffo Zarlino** (1519-1590), compositeur, tente de construire une gamme en utilisant d'autres intervalles que la quinte. Mais cette gamme ne s'impose pas auprès des musiciens de l'époque.

La gamme tempérée s'impose sous l'impulsion de **Jean-Philippe Rameau** (compositeur français, 1683-1764, photo ci-contre) et de **Johann Sebastian Bach** (compositeur allemand, 1685-1750).



Pythagore et les pythagoriciens élaborent une gamme en progressant de quinte en quinte.



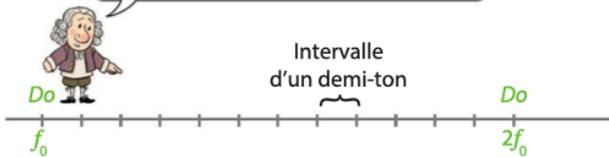
À la fin du xvi^e siècle, l'ingénieur flamand **Simon Stevin** (1548-1620) a l'idée de partager l'octave en douze intervalles égaux.

À la fin du $xvii^e$ siècle, le musicien allemand **Andreas Werckmeister** travaille lui aussi sur cette méthode, en intégrant les nombres irrationnels.

Document 2 : La gamme tempérée

1

On divise l'octave en douze intervalles égaux, que l'on appellera « demi-tons » et que l'on note $t_{1/2}$.



3

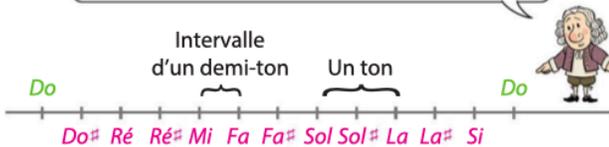
Mathématiquement, si on numérote les fréquences successives de notre gamme, pour chaque intervalle on a :

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \dots = \frac{f_{11}}{f_{10}} = \frac{f_{12}}{f_{11}} = t_{1/2}$$



2

Si on place toutes les notes de la gamme de do, on voit que les notes principales sont séparées soit d'un demi-ton, soit d'un ton entier.



Avec notre do d'octave, on voit que : $f_{12} = 2 \times f_0$, donc que $\frac{f_{12}}{f_0} = 2$.

On peut exprimer cette fraction en fonction des autres fréquences :

$$\frac{f_{12}}{f_0} = \left(\frac{f_{12}}{f_{11}}\right) \times \left(\frac{f_{11}}{f_{10}}\right) \times \left(\frac{f_{10}}{f_9}\right) \times \left(\frac{f_9}{f_8}\right) \times \left(\frac{f_8}{f_7}\right) \times \left(\frac{f_7}{f_6}\right) \times \left(\frac{f_6}{f_5}\right) \times \left(\frac{f_5}{f_4}\right) \times \left(\frac{f_4}{f_3}\right) \times \left(\frac{f_3}{f_2}\right) \times \left(\frac{f_2}{f_1}\right) \times \left(\frac{f_1}{f_0}\right) = 2$$

Autrement dit : $\frac{f_{12}}{f_0} = t_{1/2} \times t_{1/2} \times t_{1/2} \dots \times t_{1/2} = (t_{1/2})^{12} = 2$

Pour construire une gamme tempérée, il nous faut la valeur du rapport du demi-ton : les mathématiques vont nous aider.

Ce qui nous conduit à la valeur du rapport d'un demi-ton :

Si : $(t_{1/2})^{12} = 2$, alors $t_{1/2} = 2^{1/12}$

On nomme cette valeur « racine douzième de 2 », et on peut aussi l'écrire $\sqrt[12]{2}$

Document 3 : Transposer l'intérêt des intervalles égaux

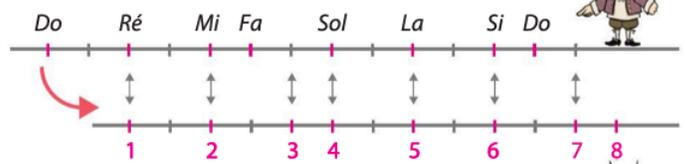
Transposer, c'est modifier la tonalité d'un morceau en intervenant uniquement sur la hauteur de note. Par exemple, *Au clair de la Lune* se joue au piano en commençant par un *do*. La clarinette, qui joue dans une autre tonalité, doit commencer par un *ré* et, en conséquence, doit « décaler » toutes les notes du morceau. La mélodie initiale du morceau est ainsi préservée bien qu'elle ne soit pas jouée à la même hauteur.

La mélodie étant liée aux intervalles entre les notes, la transposition n'est possible qu'avec une gamme à intervalles égaux telle que la gamme tempérée.

La transposition permet de faire jouer simultanément plusieurs instruments accordés dans des tonalités différentes. Pour que la transposition soit possible, les instruments doivent être accordés sur la gamme tempérée. Actuellement, c'est le cas de presque tous les instruments dont les notes sont fixées par le fabricant (guitare, flûte, clarinette, etc.). Mais certains instrumentistes préfèrent privilégier les accordages d'époque pour conserver une certaine authenticité.

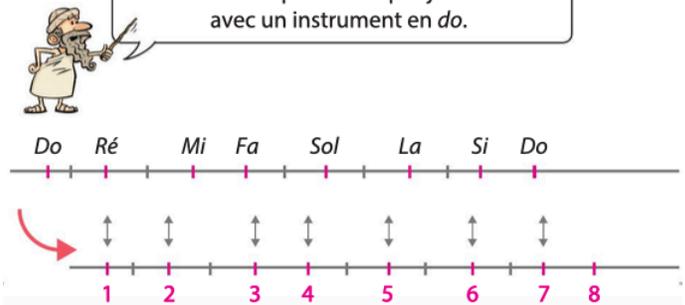
La gamme tempérée a rendu la musique plus pratique, même si elle a un peu perdu en justesse.

Si j'ai un morceau en *do*, et que je veux le transposer en *ré*, je vais devoir décaler toutes mes notes.



Avec la gamme tempérée, les *do* deviennent des *ré*, les *ré* deviennent des *mi* et ainsi de suite. On retombe sur des notes déjà existantes, et on peut dire que la nouvelle gamme est *ré-mi-fa#-sol-la-si-do#*

Si on essaie de faire la même transposition avec ma gamme, on voit qu'on ne retombe pas sur des notes existantes. Un instrument en *ré* ne peut donc pas jouer avec un instrument en *do*.



Questions

1. A quelle époque est apparue la gamme tempérée ? Quelle est sa particularité ?
2. Quelle est la valeur du rapport de fréquences d'un demi-ton ? En déduire celle d'un ton.
3. Dans la gamme à intervalles égaux, la hauteur du *la*, fixée à 440 Hz, sert de référence. Calculer les fréquences des deux notes suivantes (*la#* et *si*) et précédentes (*sol* et *sol#*).
4. Dans la gamme de Pythagore, l'intervalle *do-sol* est une quinte parfaite, c'est-à-dire que le rapport de fréquence est $3/2$. En est-il de même dans la gamme des intervalles égaux ? Conclure sur la qualité de consonance de la quinte.
5. Lors d'une transposition, la tonalité d'un morceau de musique la tonalité d'un morceau de musique est augmentée de deux ton et demi. Par quelle note le *do* est-il remplacé ?
6. En quoi la gamme à intervalles égaux (ou gamme tempérée) est-elle plus pratique pour les musiciens ?