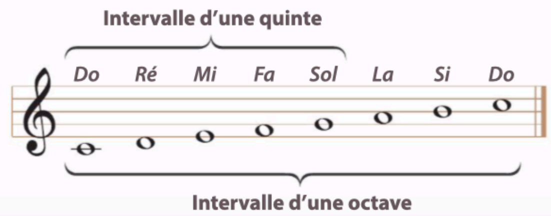
LA GAMME DE PYTHAGORE

Document 1 : la gamme

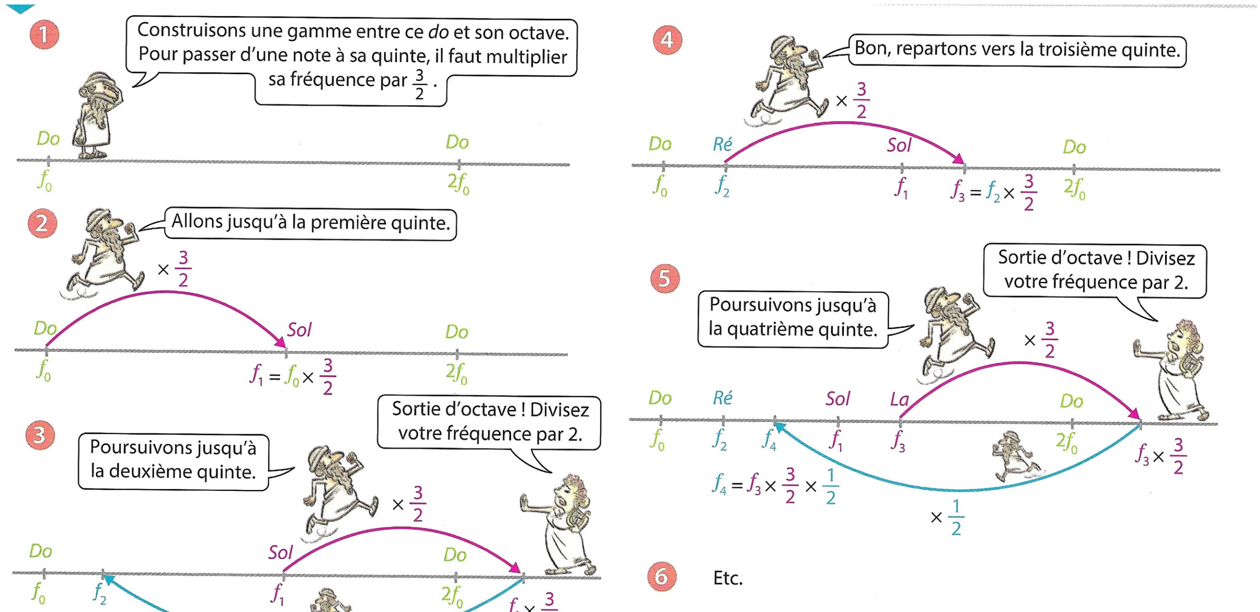
Une gamme est un ensemble de notes réparties sur une octave. Élaborer une gamme implique de faire plusieurs choix concernant les notes : leur nombre, leur fréquence (ou hauteur) et leur nom. Ces choix, essentiellement culturels, ont évolué au cours de l'histoire de la musique. Ainsi, les notes principales de la gamme de *do* se nomment actuellement *do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*. Pour avoir plus de possibilités, les compositeurs utilisent aussi des notes supplémentaires situées entre les notes principales : les notes altérées d'un dièse (*do*♯, *ré*♯, *fa*♯, *sol*♯, *la*♯) ou d'un bémol (*ré*♭, *mi*♭, *sol*♭, *la*♭, *si*♭) selon la tonalité souhaitée pour la composition.
Cela fait un total de douze notes réparties entre un *do* et le *do* de l'octave supérieure. Il n'est pas nécessaire de choisir des notes en dehors de cette octave : elles auraient une sonorité semblable. On énonce le nom des notes de la plus grave à la plus aiguë, elles sont donc rangées dans l'ordre des fréquences fondamentales croissantes. Les valeurs des fréquences des notes dépendent de la méthode employée pour construire la gamme.

Document 2 : La quinte

La gamme de Pythagore, utilisée jusqu'au XVIIIe siècle, a pour origine l'étude du son créé par une corde tendue sur un chevalet. Une corde d'une certaine longueur et une corde deux fois plus courte produisent deux sons séparés d'une octave. Pythagore s'aperçoit alors que d'autres intervalles consonants, comme la quinte, peuvent être produits avec des cordes dont les longueurs correspondent à des rapports simples de nombres entiers. Les pythagoriciens construisent une gamme dont les notes sont séparées d'une quinte, un intervalle contenant cinq notes. Par exemple, l'intervalle entre le *do* et le *sol* qui le suit constitue une quinte. À l'instar de tous les intervalles, la quinte est définie par un rapport de fréquence : il s'agit du rapport 3/2.



Document 3 : Construction de la gamme de do de Pythagore



Les noms des notes n'existaient pas à l'époque de Pythagore, mais nous leur attribuons ici les noms des notes les plus proches afin de les repérer plus facilement.

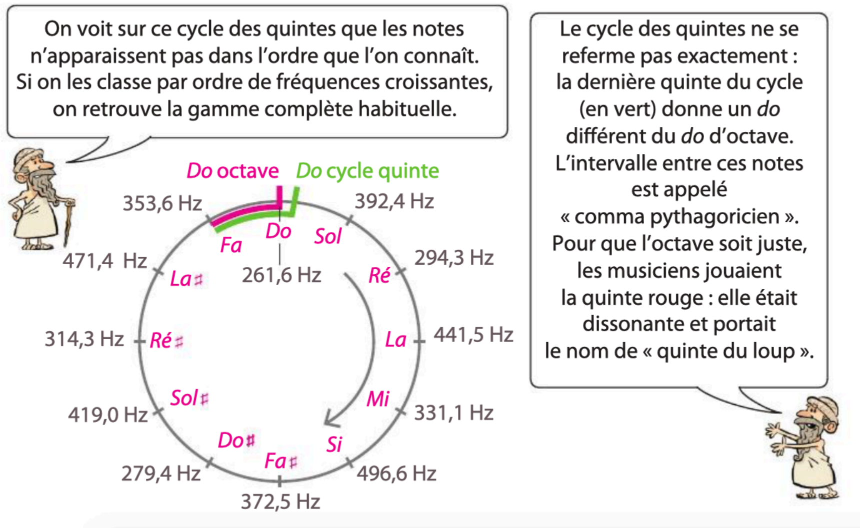
Document 4 : L'infinité du cycle des quintes

La gamme de Pythagore se construit par quintes successives. Comme le montrent les premières notes, les fréquences obtenues s'expriment toutes en fonction d'un rapport entre une puissance de trois et une puissance de deux : $f = \frac{3^n}{2^p} \times f_0$ (*n* et *p* étant des nombres entiers).

On peut arrêter de progresser dans les quintes quand la fréquence obtenue est égale à celle du *do* de la fin d'octave : $f = 2 \times f_0$. La boucle est alors bouclée. La fin du cycle correspond donc à l'équation mathématique : $\frac{3^n}{2^p} = 2$.

Cependant, 3 n'étant pas divisible par 2, cette équation n'a pas de solution et il est donc impossible d'atteindre exactement la fin de l'octave. On dit que le cycle des quintes est infini. Toutefois, certaines notes en sont parfois suffisamment proches : au bout de 12 quintes, mais aussi au bout 5, 7, 41, 53 quintes, etc. Ce qui signifie que la méthode de Pythagore permet d'élaborer des gammes contenant un autre nombre que douze notes. Il s'agit alors d'un choix d'ordre musical.

Document 5 : fréquences de la gamme à douze notes de Pythagore



Questions

1. Dans quel intervalle doivent être placées les notes d'une gamme ? Pourquoi se limiter à cet intervalle ?
2. Pythagore a choisi la quinte pour construire sa gamme. Qu'est-ce qu'une quinte?
3. Montrer que les notes obtenues avec les trois premières quintes de la gamme de Pythagore ont un rapport de fréquences avec la note do de : $\frac{3}{2}$; $\frac{3^2}{2^3}$ et $\frac{3^3}{2^4}$. Écrire ces rapports avec des nombres entiers.
4. À partir de ces résultats, calculer les valeurs de fréquences du sol, du ré et du la de la gamme.
5. Calculer la fréquence du do d'octave obtenu avec le cycle des quintes, puis celle du do d'octave selon la définition de l'octave. En déduire la valeur du comma pythagoricien.
6. En vous aidant des valeurs du cycle, montrer que les intervalles entre les notes de la gamme de Pythagore ne sont pas constants.